1 | **Ecce homo I**

Welche der folgenden Abbildungsvorschriften beschreiben wohldefinierte Gruppenhomomorphismen? Bestimmen Sie bei den Gruppenhomomorphismen jeweils den Kern und das Bild!

(a) $(\mathbb{N},+) \to (\mathbb{Z},+)$

$x \mapsto -x$

1/2

Kein Gruppenhomomorphismus, denn $(\mathbb{N},+)$ ist keine Gruppe.

(b) $(\mathbb{Z},+) \to (\mathbb{Z},+)$

$x \mapsto x-2$

1/2

Kein Gruppenhomomorphismus, denn $0 \mapsto -2 \neq 0$

(c) $f: \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to (\{+1,-1\},\cdot)$

$[x] \mapsto (-1)^x$

1

1/4 wohldefiniert: $[x]=[y]$

$\Rightarrow x-y \in 2\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \underbrace{(-1)^{x-y}}_{(-1)^x \cdot ((-1)^y)^{-1}} = 1$

$\Rightarrow (-1)^x = (-1)^y$

also $f([x]) = f([y])$ ✓

1/4 Gruppenhomomorphismus:

Def. von + auf $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$f([x]+[y]) = f([x+y])$

$= (-1)^{x+y}$

$= (-1)^x \cdot (-1)^y$

$= f([x]) \cdot f([y])$

1/4 $\mathrm{im}(f) = \{\pm 1\}$

1/4 $\ker(f) = \{[0]\}$

(d) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}, +)$

1/2 $[x] \mapsto x$

nicht wohldefiniert:

$$\begin{array}{ccc} [0] & \longmapsto & 0 \\ \parallel & & \neq \\ [2] & \longmapsto & 2 \end{array}$$

(e) $f: (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

1 $x \mapsto x^2$

1/2 Gruppenhomomorphismus:

$$f(x \cdot y) = (xy)^2 = x^2 y^2 = f(x) \cdot f(y)$$

$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ abelsch

1/4 $\mathrm{im}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

1/4 $\ker(f) = \{+1, -1\}$

(f) $f: (\{+1,-1\},\cdot) \to S_\square$

1

$$1 \mapsto d_0$$
$$-1 \mapsto s_x$$

Gruppenhomomorphismus:

$f(1\cdot 1) = f(1) = d_0 = d_0 \circ d_0 = f(1)\circ f(1)$

$f(1\cdot(-1)) = f(-1) = s_x = d_0 \circ s_x = f(1)\circ f(-1)$

$f((-1)\cdot 1) = \ldots$ analog $\ldots = f(-1)\circ f(1)$

1/2 $f((-1)\cdot(-1)) = f(1) = \boxed{d_0 = s_x \circ s_x} = f(-1)\circ f(-1)$

entscheidend

1/4 $\mathrm{im}(f) = \{d_0, s_x\}$

1/4 $\ker(f) = \{1\}$

(g) $f: (\{+1,-1\},\cdot) \to S_\square$

1/2

$$1 \mapsto d_0$$
$$-1 \mapsto d_1$$

Kein Gruppenhomomorphismus denn

$$f((-1)\cdot(-1)) = f(1) = d_0$$
$$\neq$$
$$f(-1)\circ f(-1) = d_1 \circ d_1 = d_2$$

Begründungen sind nötig in dem Umfang, in dem sie hier angegeben sind.
Gesamtpunktzahl für die Aufgabe auf halbe Punkte aufrunden.

2 | Synchronknüpfen

Das kartesische Produkt $G \times H$ zweier Gruppen $(G, \cdot)$ und $(H, \circ)$ ist mittels der „elementweisen Verknüpfung“

$$(g, h) \odot (g', h') := (g \cdot g', h \circ h')$$

wieder eine Gruppe.

Gruppe:

(G1) $\odot$ assoziativ:

1

$$[(g,h) \odot (g',h')] \odot (g'',h'')$$
$$\underset{\text{Def. } \odot}{=} (g \cdot g', h \circ h') \odot (g'',h'')$$
$$\underset{\text{Def. } \odot}{=} ((g \cdot g') \cdot g'', (h \circ h') \circ h'')$$
$$\underset{\substack{\cdot \text{ assoziativ} \\ \circ \text{ assoziativ}}}{=} (g \cdot (g' \cdot g''), h \circ (h' \circ h''))$$
$$\underset{\text{Def. } \odot}{=} (g,h) \odot (g' \cdot g'', h' \circ h'')$$
$$\underset{\text{Def. } \odot}{=} (g,h) \odot [(g',h') \odot (g'',h'')]$$

(G2): $\exists$ neutrales Element

1

Sei 1_G neutrales Element von G.
Sei 1_H neutrales Element von H.
Dann ist $(1_G, 1_H)$ neutrales Element für $\odot$:

$$(1_G, 1_H) \odot (g,h) \underset{\text{Def. } \odot}{=} (1_G \cdot g, 1_H \circ h)$$
$$= (g,h)$$

1/4 Punkt Abzug, falls nur eine der beiden Bed. gezeigt wird

und $(g,h)\odot(1_G,1_H) \underset{\text{Def.}\odot}{=} (g\cdot 1_G, h\circ 1_H)$
$= (g,h)$

(G3) $\exists$ Inverse Elemente:

1 Sei $(g,h)\in G\times H$ gegeben.
Sei $g^{-1}\in G$ invers zu g,
$h^{-1}\in H$ invers zu h.
Dann ist (g^{-1},h^{-1}) invers zu (h,g):

$$(g,h)\odot(g^{-1},h^{-1}) \underset{\text{Def.}\odot}{=} (g\cdot g^{-1}, h\cdot h^{-1}) = (1_G, 1_H)$$

$$(g^{-1},h^{-1})\odot(g,h) \underset{\text{Def.}\odot}{=} (g^{-1}\cdot g, h^{-1}\cdot h) = (1_G, 1_H)$$

1/4 Punkt Abzug falls nur eine der beiden Bedingungen gezeigt wird.

Ferner sind die Projektionen $(G,\cdot) \xleftarrow{\pi_G} (G\times H,\odot) \xrightarrow{\pi_H} (H,\circ)$ Homomorphismen.

1/2

$$\pi_G((g,h)\odot(g',h')) \underset{\text{Def.}\odot}{=} \pi_G((g\cdot g', h\circ h'))$$
$$= g\cdot g'$$
$$= \pi_G((g,h))\cdot\pi_G((g',h'))$$

Für π_H lässt sich das analog zeigen.

(das reicht)

Sowohl G als auch H lassen sich als Untergruppen von $(G \times H, \odot)$ auffassen: es gibt kanonische Monomorphismen $(G, \cdot) \hookrightarrow (G \times H, \odot) \hookleftarrow (H, \circ)$.

1/2

$$i_G : (G, \cdot) \longrightarrow (G \times H, \odot)$$
$$g \longmapsto (g, 1_H)$$

i_G ist Gruppenhomomorphismus:

$$i_G(g \cdot g') = (g \cdot g', 1_H)$$
$$= (g \cdot g', 1_H \cdot 1_H)$$
$$= (g, 1_H) \odot (g', 1_H)$$
$$= i_G(g) \odot i_G(g').$$

i_G ist Monomorphismus:

$$i_G(g) = i_G(g')$$
$$\rightarrow \underbrace{\pi_G(i_G(g))}_{g} = \underbrace{\pi_G(i_G(g'))}_{g'}$$

Für $i_H : (H, \circ) \longrightarrow (G \times H, \odot)$
$$h \longmapsto (1_G, h)$$
lässt sich das analog zeigen.

(das reicht)

. Diese Untergruppen – also genauer die Bilder dieser Monomorphismen – sind normal.

1/2

Option A:

$$i_G(G) = \{ (g, 1_H) \mid g \in G \} = \ker(\pi_H)$$
$$i_H(H) = \{ (1_G, h) \mid h \in H \} = \ker(\pi_G)$$

Kerne sind normal nach Korollar 2.24.

Option B:

Für $(g,h) \in G \times H$ ist

$$(g,h) \circ i_G(G) = \{ (g \cdot g', h \cdot 1_H) \mid g' \in G \}$$
$$= \{ (g'', h) \mid g'' \in G \},$$

$\subseteq$ Wähle $g'' := g \cdot g'$.

$\supseteq$ Wähle $g' := g^{-1} \cdot g''$.

und genauso ist

$$i_G(G) \circ (g,h) = \{ (g'', h) \mid g'' \in G \}.$$

Also $(g,h) \circ i_G(G) = i_G(G) \circ (g,h)$.

Analog für $i_H(H)$.

(das reicht)

Was sind die jeweiligen Quotientengruppen?

1/2

$\ker(\pi_G) = i_H(H)$ (siehe oben)

also

$$G \times H / i_H(H) \xrightarrow[\cong]{\pi_G} \operatorname{im}(\pi_G) = G$$

nach Isomorphiesatz 2.25.

Analog $G \times H / i_G(G) \cong H$.

(das reicht)

Wie immer auf halbe Punkte aufrunden.